المحاضرة العشرون

2017/12/10

مراجعة لبند: $\bar{S}$ مجموع لبيج الأعلى على المجال $[m, M]$

وجدنا العلاقة:

$$\underline{S} \le s(f,P) \le \bar{S}$$

ملاحظة:

من خلال العلاقة: $0 \le \bar{S} - \underline{S} \le \varepsilon\,\lambda(E)$ نستنتج:

$$0 \le I_u - I_l \le \varepsilon\,\lambda(E)$$

ملاحظة:

إذا كان: $I_u = I_l = I$ فإننا نسمي القيمة المشتركة لهما بتكامل لبيج للدالة f المحدودة على المجموعة E بشرط $\lambda(E) < \infty$ ونكتب في هذه الحالة:

$$I = (L)\int_E f\,d\lambda$$

من الواضح أن الدالة f قابلة للمكاملة حسب مفهوم لبيج على المجموعة E وهذه المجموعات قابلة للقياس منتهية

وكل دالة محدودة على مجموعة محدودة وقابلة للقياس منتهية تكون قابلة للمكاملة حسب مفهوم لبيج على هذه المجموعة.

مثال:

الدالة ديريشليه المعرفة على $E = [0,1]$ بالشكل:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

الحل:

لدينا الدالة معرفة حسب تعريف سابق على $E = [0,1]$.

$\lambda(E) = 1 < \infty$

إذا أصبح $\varphi(x)$ دالة محدودة: $0 \le \varphi(x) \le 1$ مثلا $\forall x \in E$

هي قابلة للمكاملة حسب مفهوم لبيج على $[0,1]$ أي $\int_{[0,1]} \varphi(x)\,d\lambda$ موجود.

ملاحظة:
كل دالة قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان تكون قابلة للمكاملة حسب مفهوم لوبيغ لكن العكس غير صحيح.

ملاحظة:
إذا كانت f دالة محدودة على مجموعة مقيسة E فإنها تكتب أحيانا:

$$m < f(x) < M \quad ; \forall x \in E$$

لا نهتم بـ m و M لنسهل العلاقة نفسها، لنكامل إن تكامل لوبيغ مستقلة عن قيم m و M.

ملاحظة:

$$[m,M] =]m,M[\cup \{m,M\}$$

ملاحظة:
لتكن f دالة مقيسة ومحدودة على المجموعة المقيسة E $(\lambda(E)<\infty)$ عندئذ يكون:

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{S} = \lim_{\delta\to 0} s(f,P) = \lim_{\delta\to 0} \bar{S} = \lim_{\delta\to 0} S(f,P)$$

$$= (L)\int_E f \, d\lambda$$

حيث:
مجموع لوبيغ الأعلى لـ f على $[m,M]$ $\quad \bar{S} = S(f,P)$

مجموع لوبيغ الأدنى لـ f على $[m,M]$ $\quad \underline{S} = s(f,P)$

$$\delta = \max_{1\le k\le n} (y_k - y_{k-1})$$

خواص تكامل ليبغ :

1- إذا كانت f دالة قابلة للقياس محدودة على E و $\lambda(E)<\infty$ و إذا كان:

$\forall x \in E$; $m \le f(x) \le M$

فإن:

$$m\,\lambda(E) \le \int_E f\,d\lambda \le M\,\lambda(E)$$

و إذا كانت f دالة ثابتة أي $f(x)=c$ فإن:

$$\int_E f\,d\lambda = c\,\lambda(E)$$

بالفعل:

$$c\,\lambda(E) \le \int_E f(x)\,d\lambda \le c\,\lambda(E) \Leftrightarrow \int_E f\,d\lambda = c\,\lambda(E)$$

حيث أن: $M=m=c$

2- إذا كانت f دالة قابلة للقياس محدودة على المجموعة E وكانت $\lambda(E)<\infty$ ومستقل ما هو إذا كانت $\lambda(E)=\infty$ فإن تكامل ليبغ للدالة f يكون بالشكل:

$$\int_E f\,d\lambda = \infty$$

3- إذا كانت f دالة قابلة للقياس على المجموعة E وكانت $f(x)\ge 0$ أو $(f(x)\le 0)$ على E فإن:

$$\int_E f\,d\lambda \ge 0 \quad \text{أو} \quad \left(\int_E f\,d\lambda \le 0\right)$$

ل- إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على $E = \bigcup E_k$ (المجموعات قابلة للقياس) والمجموعات E_k منفصلة مثنى مثنى والتكامل موجود ومحدود على المجموعة E فإن قيمة تكامل ليبيغ هو:

$$\int_E f\,d\lambda = \int_{\bigcup E_k} f\,d\lambda = \sum_k \int_{E_k} f\,d\lambda$$

وبصورة خاصة إذا كانت:

مهم

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow \int_E f\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f\,d\lambda$$

٥- إذا كانت f، g دالتين قابلتين للقياس ومحدودتين على E و $\lambda(E)<\infty$ حيث c_1, c_2 عددين ثابتين حقيقيين فإن:

$$\int_E [c_1 f + c_2 g]\,d\lambda = c_1\int_E f\,d\lambda + c_2\int_E g\,d\lambda$$

مبرهنة:

إذا كانت f، g دالتين محدودتين على المجموعة المقيسة E وحيث أن: $f(x) \le g(x)\ ;\ \forall x\in E$ فإن:

$$\int_E f\,d\lambda \le \int_E g\,d\lambda$$

البرهان:

إذا فرضنا

$$F(x) = g(x) - f(x) \ge 0 \ ;\ \forall x \in E$$

فإن F(x) مقيسة ومحدودة على E

$$\int_E F\,d\lambda = \int_E [g-f]\,d\lambda \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_E [g-f]\,d\lambda = \int_E g\,d\lambda - \int_E f\,d\lambda \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_E g\, d\lambda \geq \int_E f\, d\lambda$$

وهو المطلوب.

مبرهنة:

اذا كانت f, g دالتين قابلتين للقياس معرفتين على E متساويتين تقريبا في كل مكان على المجموعة E فإن تكامل ليبيغ للدالة f يساوي تكامل ليبيغ للدالة g أي:

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda$$

البرهان:

لنفرض:

$$E_1 = E(f = g) \quad , E_2 = E(f \neq g)$$

$$E_1 \cup E_2 = E \quad ; \lambda(E_2) = 0$$

من هذا نجد أن:

$$\int_{E_2} f\, d\lambda = \int_{E_2} g\, d\lambda = 0 \quad \ldots\ldots 1$$

$$\int_{E_1} f\, d\lambda = \int_{E_1} g\, d\lambda \quad \ldots\ldots 2$$

ومن الملاحظة:

$$\forall x \in E_1 : f(x) = g(x)$$

وعليه:

$$\int_E f\, d\lambda = \int_{E_1 \cup E_2} f\, d\lambda = \int_{E_1} f\, d\lambda + \int_{E_2} f\, d\lambda = \int_{E_1} g\, d\lambda + \int_{E_2} g\, d\lambda$$

$$= \int_{E_1 \cup E_2} g\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda \Rightarrow \int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda$$

نتيجة:

اذا كانت $f \overset{a.e}{=} 0$ على E فإن: $\int_E f\, d\lambda = 0$

Scanned by CamScanner

إذا فرضنا: $g = 0$ ؛ $\forall x \in E$ فإن: $\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda$

وحسب المبرهنة السابقة:

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\lambda = 0$$

ملاحظة:

إن عكس هذه النتيجة غير صحيح بشكل عام؟ حيث نستطيع إيجاد تكامل لوبيغ للدالة f على E يساوي الصفر مع أن هذه الدالة لا تساوي الصفر تقريباً في كل مكان.

مثال:

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على $E=[-1,1]$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; -1 \leq x < 0 \\ 1 & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

الحل:

إن هذه الدالة معرفة على E لأن إذا فرضنا:

$E_1 = [-1,0[\quad , \quad E_2 = [0,1]$

فإن هاتين المجموعتين مقيستين حسب لوبيغ $\lambda(E_1) = \lambda(E_2) = 1$

ولدينا: $E_1 \cap E_2 = \phi \quad , \quad E_1 \cup E_2 = E$

أي أن هاتين المجموعتين منفصلتين مثنى مثنى وتشكلان تجزئة للمجموعة E

ونلاحظ أن الدالة $f(x)$ تكتب بالشكل:

$$f(x) = (-1) I_{E_1}(x) + (1) I_{E_2}(x)$$

إن $I_{E_1}(x)$ مقيسة على E وذلك لأن E_1 مقيسة

و الدالة $I_{E_2}(x)$ مقيسة على E وذلك لأن E_2 مقيسة

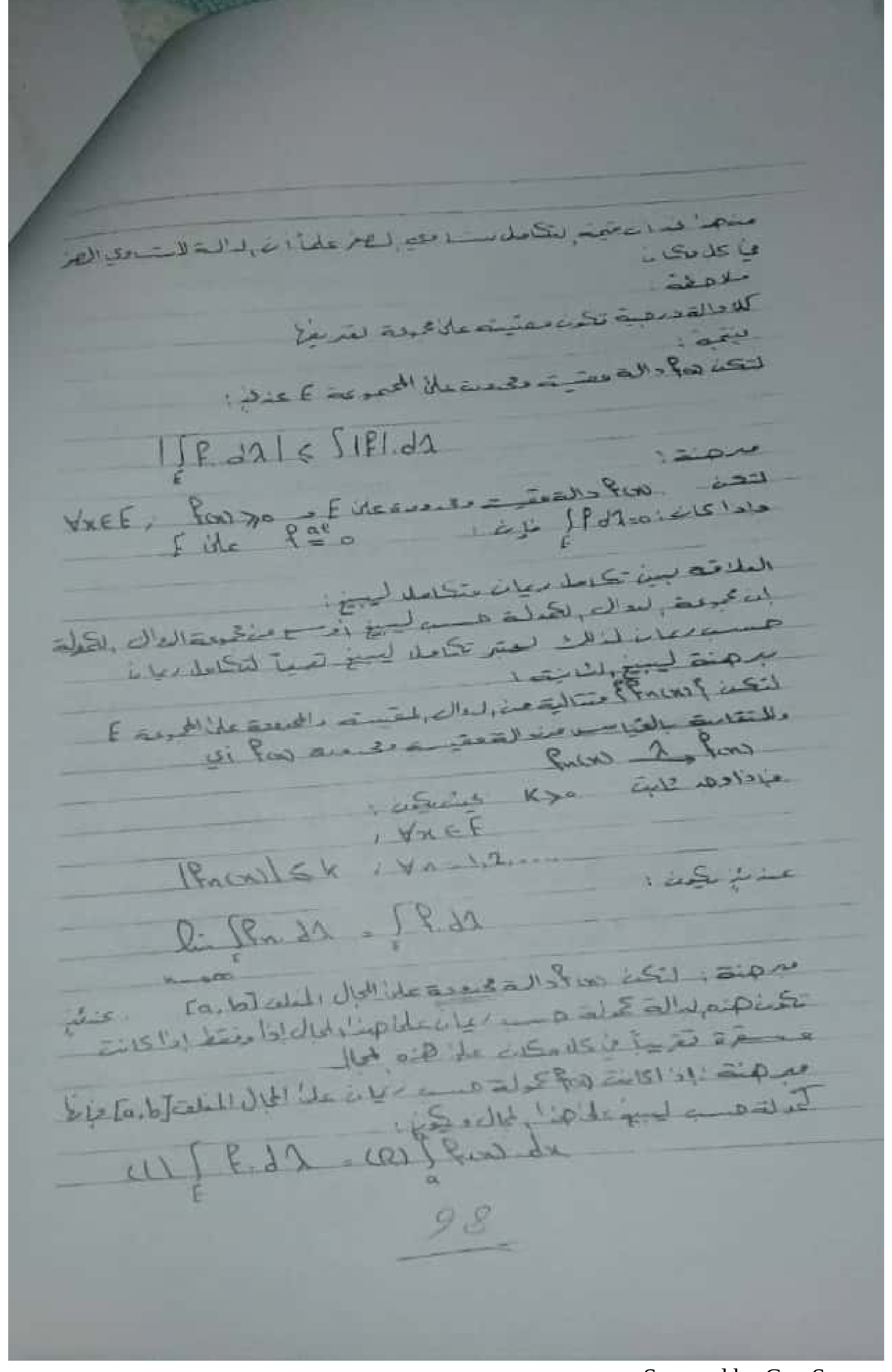
ومن خواص الدوال المقيسة نجد أن الدالة $f(x)$ مقيسة على E

ولنثبت أنها محدودة:

$$|f(x)| \leq |(-1) I_{E_1}(x)| + |(1) I_{E_2}(x)| \leq 1 + 1 = 2 \quad \forall x \in E$$

وبالتالي الدالة مقيسة ومحدودة ومنه تكامل لوبيغ موجود ونحسبه:

$$\int_E f \, d\lambda = \int_{E_1} f \, d\lambda + \int_{E_2} f \, d\lambda = (-1)\lambda(E_1) + (1)\lambda(E_2) = -1 + 1 = 0$$



منه: فضاءات منتهية التكامل بالنسبة لقياس العد على ... الدالة لا تساوي الصفر في كل نقطة

ملاحظة:

كل دالة درجية تكون مقيسة على مجموعة التعريف

نتيجة:

لتكن $f(x)$ دالة مقيسة معرفة على المجموعة E عندئذ:

$$\left|\int_E f\,d\lambda\right| \le \int |f|\,d\lambda$$

مبرهنة:

لتكن $f(x)$ دالة مقيسة معرفة على E و $f(x)\ge 0$ ، $\forall x\in E$

فإذا كان $\int_E f\,d\lambda = 0$ فإن $f \overset{ae}{=} 0$ على E

العلاقة بين تكامل ريمان وتكامل ليبيغ:

إن مجموعة الدوال القابلة للمكاملة حسب ليبيغ أوسع من مجموعة الدوال القابلة للمكاملة حسب ريمان لذلك يعتبر تكامل ليبيغ تعميماً لتكامل ريمان

مبرهنة ليبيغ للتقارب المحدود:

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال المقيسة والمعرفة على المجموعة E والمتقاربة بالقياس من الدالة المقيسة $f(x)$ أي $f_n(x) \xrightarrow{\lambda} f(x)$

فإذا وجد ثابت $K>0$ بحيث يكون:

$\forall x\in E$;

$|f_n(x)|\le K$; $\forall n=1,2,\dots$

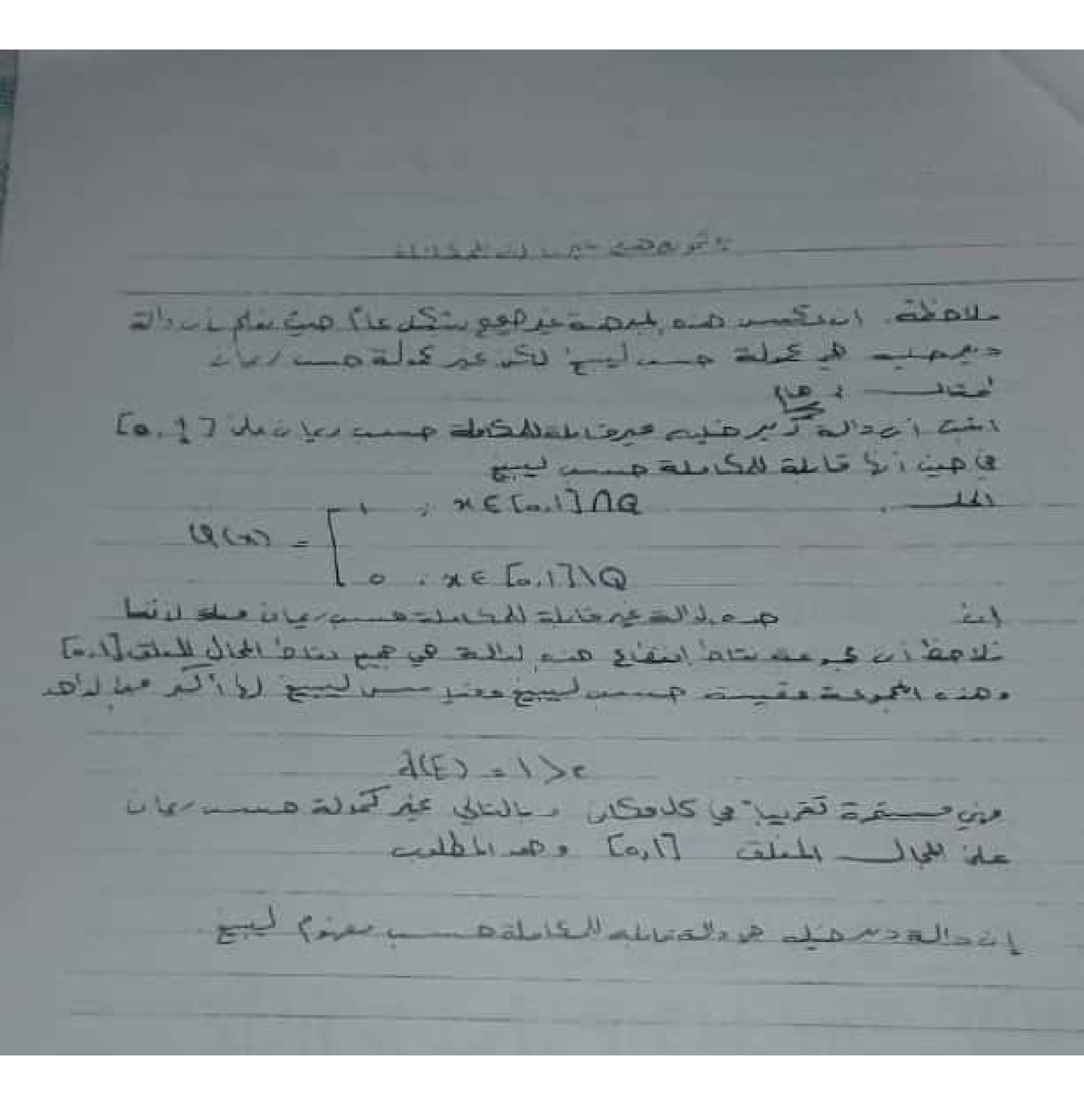
عندئذ يكون:

$$\lim \int_E f_n\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda$$

مبرهنة: لتكن $f(x)$ دالة محدودة على المجال المغلق $[a,b]$ عندئذ تكون $f(x)$ دالة قابلة للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال إذا وفقط إذا كانت مستمرة تقريباً في كل مكان على هذا المجال

مبرهنة: إذا كانت $f(x)$ قابلة للمكاملة حسب ريمان على المجال المغلق $[a,b]$ فإنها قابلة للمكاملة حسب ليبيغ على هذا المجال ويكون:

$$(L)\int_E f\,d\lambda = (R)\int_a^b f(x)\,dx$$



ملاحظة: العكس غير صحيح بشكل عام؟ حيث يمكن أن دالة ديريكليه هي كمولة حسب ليبغ لكن غير كمولة حسب ريمان

مثال:

اثبت أن دالة ديريكليه غير قابلة للمكاملة حسب ريمان على [0,1] و هي قابلة للمكاملة حسب ليبغ

الحل:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \cap Q \\ 0 & ; x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$$

إن ... هذه الدالة غير قابلة للمكاملة حسب ريمان وذلك لأننا نلاحظ أن مجموعة نقاط انقطاع هذه الدالة هي جميع نقاط المجال المغلق [0,1] وهذه المجموعة مقيسة حسب ليبغ وقياسها حسب ليبغ لا يساوي الصفر

$$d(E) = 1 > 0$$

فهي غير مستمرة تقريباً في كل مكان وبالتالي غير كمولة حسب ريمان على المجال المغلق [0,1] وهو المطلوب

إن دالة ديريكليه هي دالة قابلة للمكاملة حسب مفهوم ليبغ

Scanned by CamScanner